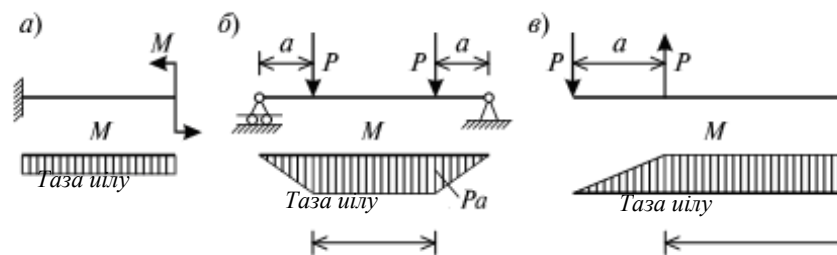


5 ЖАЗЫҚ ИІЛУ

5.1 Негізгі түсініктер

Машина жасау өнеркәсібінде, құрылыста ұзындық өлшемі қима аудан өлшемдерінен әлдеқайда жоғары бөлшектер жиі кездеседі. Олар белгілі бір тірекке орналасып, көлденең түскен күштерді, жүктерді ұстап тұрса, олар арқалық болады (5.1-сурет). Әрине, бұл арқалық түскен күштердің әсерінен иіледі, майысады.

Арқалық немесе брус ию моменттері әсерінен пайда болған деформацияны **иілу** деп атайды. Егер арқалықтың көлденең қимасында тек ию моменті болса, оны **таза иілу** дейді (5.1-сурет).

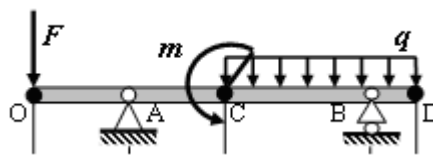


5.1-сурет

Көлденең қимада ию моментімен қоса көлденең күш те пайда болса, онда **көлденең иілу** деп аталады.

Егер арқалықтың иілу жазықтығы мен сыртқы әсер ету күштерінің жазықтығы бір болса, ол деформация **жазық иілу** деп аталады. Айтылған екі жазықтық бір-біріне сәйкеспесе, ондай иілу **қиғаш иілу** деп аталады.

Көлденең түскен күш арқалыққа қадалған немесе бірқалыпты таралған



5.1-сурет

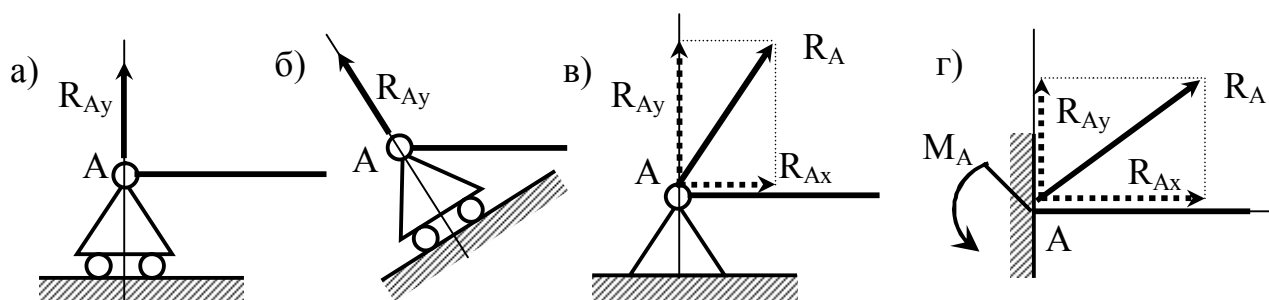
күйінде немесе бір нүктеге түскен күш моменті ретінде түседі.

Ал енді осындай немесе күш моменттері түскен арқалықтың қима ауданын есептеу, иілуге жұмыс істейтін конструкцияларды қалай құру мәселелерін қарастырайық. Ол үшін алдымен тіректердің түрін және оларда пайда болатын реакциялық (сыртқы күшке қарама-қарсы әсер ететін) күштерді анықтау керек.

Арқалық ретінде машина жасау өнеркәсібінде білікті, осьті, ұзынша

келген жүк көтергіш винттерді (мысалы, домкраттағы, винтті престегі және т. б.), қабырғаға бекітілген дінгектерді, кронштейндерді алсақ, ал құрылыс өнеркәсібінде еденге төсейтін тақтайдан немесе оны ұстап тұратын бөренеден бастап, этаж аралығын бөлетін темір-бетон алынады.

Осыған орай арқалық деп, иілуге жұмыс істейтін ұзын денелерді айтуымызға болады. Міне, осы арқалықтардың барлығы тіректерге орналасады немесе сүйенеді. Арқалық тіректерге қозғалмайтын, қозғалмалы түрде орналасады. Іс жүзінде кездесетін тіректер шартты түрде топсалы жылжымайтын (5.2, в-сурет), топсалы жылжымалы (5.2, а,б-сурет) және ұшы қатаң бекітілген (15.2, г-сурет) деп бөлінеді.



5.2-сурет

Осы тіректердің қозғалу мүмкіншілігіне байланысты әр түрлі реакция күші пайда болады. Егер арқалықтың бір ұшы бекітілген болса, онда ол оған түсетін күштің бағыты қандай болса-да қозғалмайды. Түскен күштердің немесе күш моментінің бағыты мен түріне байланысты онда екі реакция және күш моменті пайда болады (15.2, г-сурет). Ал топсалы жылжымайтын тірек арқалықты бір орнында ұстайды, жылжытпайды, бірақ ол тірекке топса арқылы орналасқан, сондықтан аралықтың өз өсінің бойымен айналуына мүмкіншілігі болады. Осыған орай айналу моменті әсер еткен жағдайда, реакциялық күш моменті (сыртқы күш моментіне қарама-қарсы күш моменті) пайда болмайды. Бұл тіректе екі реакция күші ғана пайда болады (15.2,б-сурет). Сонымен қатар, топсалы жылжымалы тіректерде тек бір ғана реакция күші пайда болады, себебі олар өз өстерінің бойымен айналуымен бірге OX өсі бойында қозғалу мүмкіншілігі болады.

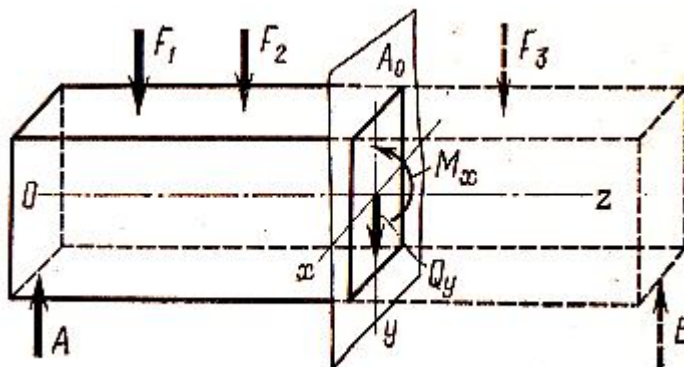
Барлық жағдайда осы тіректерде пайда болатын реакция күштері мен моменттерді анықтау үшін статикалық тепе-теңдік күйін сипаттайтын теңдеулерді пайдаланамыз.

$$\begin{aligned} \sum M = 0, & \quad \sum X = 0, & \quad \sum Y = 0. \\ \sum M_A = 0, & \quad \sum M_B = 0, & \quad \sum Y = 0. \end{aligned}$$

Егер осы статикалық теңдеулер арқылы анықталатын болса, онда ол статикалық анықталатын арқалық, ал егер белгісіз реакциялар саны теңдеу санынан көп болса, онда статикалық анықталмайтын арқалық деп аталады.

5.2 Иілу кезіндегі пайда болатын ішкі күштер M , Q және q аралығындағы дифференциалдық тәуелділіктер

Егер арқалыққа көлденең күштер әсер етіп, ол иілуге жұмыс істейтін болса, оның көлденең қимасында сол сыртқы күшке қарсы әсер ететін ішкі күштер пайда болады. Осы күштерді анықтау үшін көлденең күш әсер ететін арқалықты қарастырайық (5.3-сурет).



5.3-сурет

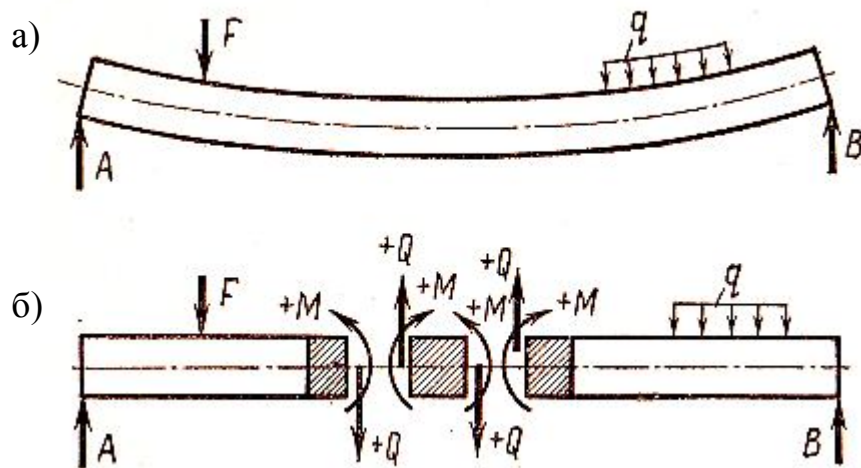
Алдымен жоғарыдағы әдістермен арқалық тіректеріндегі реакция күштерін анықтап алады.

Енді кез келген көлденең қималарда ішкі әсерлерді анықтау үшін қималар әдісін пайдаланамыз. 5.3-суретте жазықтықпен қиылған арқалық көрсетілген. Оң бөліктің сол бөлікке ететін әсері Q_y көлденең күшпен және M_x июші моментпен алмастырылып, үзік сызықпен бейнеленген.

Иілу деформациясы кезінде бір талшықтар созылуға, басқалары сығылуға ұшырайды. Бұл жағдайда төменгі талшықтар ұзарады, ал жоғарғы талшықтар қысқарады (5.4, а-суреті).

Июші моменттер мен көлденең күштер үшін төмендегі таңбалар ережесін қабылдаймыз: егер қиманың сол жағына түсірілген сыртқы күштер төменнен жоғары қарай, ал оң жағында жоғарыдан төмен қарай бағытталса, ол қимадағы көлденең күш оң таңбалы болады (5.4, б-суреті). Кері жағдайда көлденең күш теріс таңбалы.

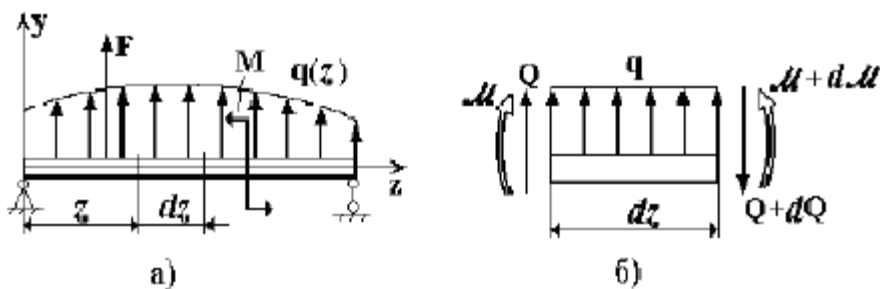
Егер қиманы сол жағына түсірілген сыртқы күштердің қосынды моменттері сағат тілімен бағыттас, ал оң жағында сағат тілінің бағытына қарсы болса (егер төменгі талшықтарды созса), қимадағы июші момент (5.4, б-суреті) оң таңбалы деп саналады. Кері жағдайда июші момент теріс таңбалы.



5.4-сурет

M_x июші момент, Q_y көлденең күш және q сыртқы күштердің қарқындылығы өзара белгілі бір тәуелділікте болады.

Белгілі заңмен таралушы күш әсер ететін арқалықтың (5.4, а-сурет) ұзындығы dz (5.4,б-сурет) элементті аламыз.



5.5-сурет

Екі тепе-теңдік теңдеу құрамыз:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Q + q \cdot dz - (Q + dQ) = 0;$$

$$\sum m_x = 0; \quad -M - Q \cdot dz - q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + (M + dM) = 0.$$

Қарапайым түрлендірулерден кейін жоғарыдағы теңдеулерден

$$\frac{dM}{dz} = Q; \quad \frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{d^2M}{dz^2} = q. \quad (5.1)$$

Бұл теңдеулермен ию моменттер мен көлденең күштердің эпюрлерін салудың дұрыстығын тексеруге болады.

5.3 Көлденең күш пен ию моменттерінің эпюрін салу

Иілудегі **эпюр** деп, ию моменттері мен көлденең күштерінің арқалықтың ұзындық бойымен қалай өзгеретінін көрсететін белгілі масштабпен салынған графикті айтады. Есептеу жүргізу кезінде осы эпюрдің маңызы зор, одан конструкцияға әсер ететін июші момент пен көлденең күштің ең жоғарғы мәндерін анықтаймыз және де ол сол конструкцияның кез келген нүктесіне түскен июші момент пен көлденең күштің шамасын анықтауға мүмкіншілік береді.

Ал енді осы эпюрді салу үшін кейбір шартты жағдайларды белгілеп алуымыз керек.

Көлденең күш пен ию моменттерін біріншіден, арқалықтың сыртқы күш түсетін нүктелерінде анықтаған жөн, сондықтан арқалықты күш түсетін аралықтарына байланысты белгілі бөліктерге бөлу қажет. Екіншіден, көлденең күш пен ию моментінің таңбасы оң болса, ордината бойынша жоғары, ал таңбасы теріс болса, төмен орналастырамыз. Үшіншіден, эпюрдің дұрыс салынғанын тексеру үшін төменгі жағдайларды білген жөн.

Эпюрді салу реті:

1. Тіректердегі реакция күші мен моменттерді анықтау.

2. Арқалыққа әсер ететін күштер санына байланысты аралықтарға бөліп, оның бір тірегінен немесе ұшынан аралықтардың санына байланысты z_1, z_2, \dots, z_n қашықтықта қима жүргізу қажет..

Қиманы кез келген шеткі тіректен бастап жүргізе беруге болады, тірек пен қиманың арасында неғұрлым аз күш немесе күш моменттері әсер ететін болса, соғұрлым теңдеу оңай құрылады.

3. Жүргізілген қима бойынша арқалықтың бір жағын бөліп алып тастап, статиканың тепе-теңдік заңына байланысты теңдеу құрамыз да оны шешеміз.

4. Осы әдіспен арқалықтың қауіпті нүктелерінде әсер ететін көлденең күш пен күш моменттерін анықтап, белгілі масштабпен ординатаға белгілеп, оларды бір-бірімен қосып, эпюр құрамыз.

5.4 Көлденең күш пен моменттер эпюрінің кейбір сипаттамалары

Көлденең күш пен моменттер эпюрін тұрғызған соң, олардың дұрыстығын тексеру үшін, олардың кейбір қасиеттерін білу қажет. Келтірілген есептердің шешіміне байланысты, келтірілген қатынастар бойынша төмендегідей тұжырымдарға келуге болады:

- сыртқы қадалған күш әсер етіп тұрған қимада көлденең күштің мәні кілт өзгереді. Өзгеру шамасы қадалған күшке тең;
- бөлікте (аралықта) таралған күш болмаса, онда көлденең күш тұрақты, ал иілу момент эпюрасы сызықты заңдылықпен өзгереді;
- бөлікте (аралықта) бірдей таралған күш болса, көлденең күш сызықты заңдылықпен, ал иілу момент квадраттық парабола заңдылығымен өзгереді.

Егер эпюр созылатын талшықтарда салынса, онда параболаның дөңес жағы таралған күшпен бағыттас болады;

- қимаға сыртқы қадалған момент түсірілсе иілу момент эпюрасы сол момент шамасына өседі;
- көлденең күш нөлге тең болатын қимада иілу момент экстремаль мәнге ие болады;
- арқалықтардың ұштарындағы қималарда көлденең күш пен иілу момент қимаға түсірілген сыртқы қадалған күшке және қадалған моментке сәйкес келеді;
- шеткі арқалық топсаларда сыртқы момент әсер етпесе, иілу моменті нөлге тең болады.

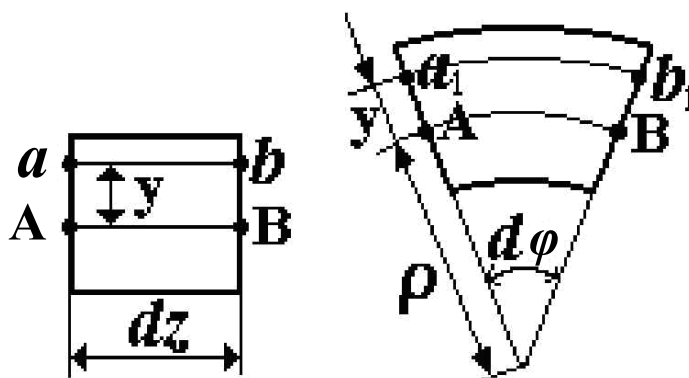
Көлденең күштің мәндері бөлік шекараларында ғана болады. Ал иілу моменттің бөлік шекараларынан басқа, көлденең күш нөлге тең болатын қима нүктесінде де мәні болады.

Егер аралықта көлденең күш эпюрасы өсті қиып жататын болса, яғни «+» таңбасы «-» таңбасына ауысып тұрса, онда $Q=0$ болған жерде иілу моментінің мәні экстримальді мәнге ие болады. Ол үшін, сол аралықтағы көлденең күш теңдеуін нөлге теңестіріп айнұмалы шаманы анықтаймыз, яғни координата мәнін.

5.5 Иілудегі пайда болатын кернеулер

Арқалықтың иілу кезінде, олардың қимасында қандай ішкі көлденең күштер мен моменттер болатыны анықталды, енді осы иілу негізінде пайда болатын кернеулерді қарастырайық. Арқалықтың иілген бір бөлігін алып (5.6-сурет), одан элементар өте кішкене бұрышпен ($d\varphi$) шектелген бөлігінің деформациясын анықтайық. Бейтарап өсінің ұзындығын AB деп алсақ, онда оның үстіңгі бойлық қимасында алынған талшығы a_1-b_1 шамасына созылады.

Егер қима квадрат немесе дөңгелек пішінді болса, онда оның жоғарғы талшықтары (бейтарап өсінен жоғары) созылып, төменгілері сол шамаға сығылады да қалыпты кернеулер мөлшері жағынан бірдей болады (5.6-сурет). Бейтарап өсіне дейінгі қашықтықты ρ деп белгілесек, ($d\varphi$) бұрышының өте кішкене екенін пайдаланып былай жазуға болады:



5.6-сурет

$$ab = dz = \rho d\varphi, \quad a_1 b_1 = (\rho + y) d\varphi$$

Салыстырмалы ұзару

$$\varepsilon = \frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (5.2)$$

Талшықтардың салыстырмалы ұзаруы олардың бейтарап өсіне дейінгі қашықтығына тікелей байланысты болады.

Ал енді қалыпты кернеудің шамасы Гук заңы бойынша:

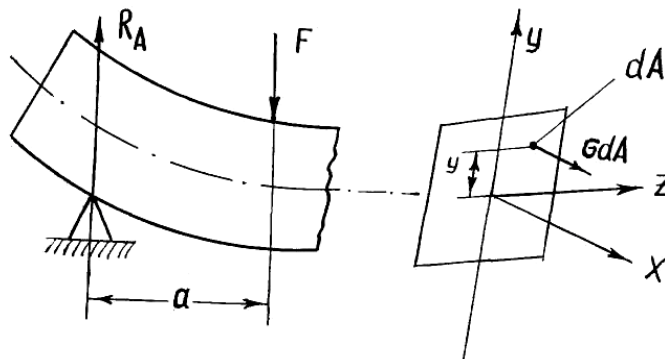
$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{немесе} \quad \sigma = E \frac{y}{\rho}$$

Қалыпты кернеу де бейтарап өсіне дейінгі қашықтыққа тікелей байланысты.

Сыртқы күш әсер ететін арқалықтың бір бөлігінің қимасындағы ішкі күштер моментін анықтап, оның сыртқы күш моментімен тепе-теңдігін қарастырайық (5.7-сурет). Қиманың ауырлық центрі арқылы координат өстерін жүргізіп, қимадан dA элементар ауданын алып, соған түсетін ішкі күшті анықтасақ, онда $dN = \sigma \cdot dA = \frac{E y}{\rho} dA$ болады.

Статиканың тепе-теңдік жағдайынан осы күштерден пайда болған күш моменттерінің қосындысы сыртқы моментке тең:

$$\int_A \sigma dA y = M \quad \text{немесе} \quad M = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (5.3)$$



5.7-сурет

Интеграл астындағы өрнек қиманың инерция моментін анықтайды

$$M = \frac{E}{\rho} J_x \quad (5.4)$$

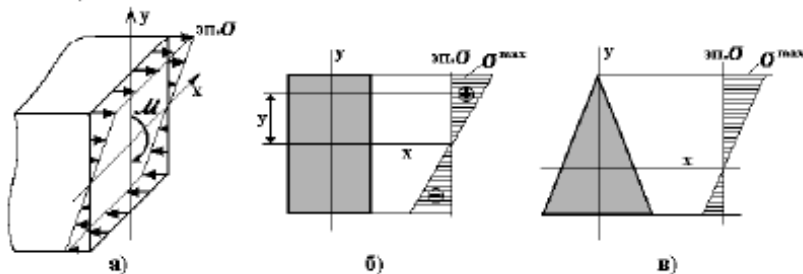
мұндағы J_x — қиманың инерция моменті; ρ — қисықтық (иілу) радиусы; E — материалдың серпімділік модулі. Осы өрнектен иілудегі деформация мәнін анықтауымызға болады: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}$

Ал енді тік кернеуді анықтасақ

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{EM}{EJ_x} y = \frac{My}{J_x}, \quad \text{яғни} \quad \sigma = M \frac{y}{J_x}, \quad (5.5)$$

мұндағы y — жоғарыда керсетілген қимадағы кернеу анықталатын нүкте мен бейтарап өсінің ара қашықтығы. Кернеудің шамасы осы қашықтыққа тікелей байланысты және оның ең жоғарғы шамасы бейтарап өсінен ең қашық шеткі нүктесінде (5.8-сурет) болады

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J} y_{\max}. \quad (5.6)$$



5.8-сурет

Ал енді қима ауданының инерция моментін өзінің бейтарап өсінен ең қашық нүктесіне дейінгі қашықтығына қатынасын W деп белгілесек, онда

$$\sigma = \frac{M}{W}. \quad (5.7)$$

Осы өрнек арқылы арқалық қимасындағы кернеудің ең жоғарғы мәнін анықтауға болады. W қима ауданының **кедергі моменті** деп аталады, ол инерция моменті мен кернеудің ең жоғарғы шамасын қабылдайтын нүктенің бейтарап өсінен қашықтығына қатынасын көрсетеді

$$W = \frac{J}{y_{\max}}. \quad (5.8)$$

Иілуге жұмыс істейтін конструкцияларда арқалықтардың беріктік шарты төмендегідей болады:

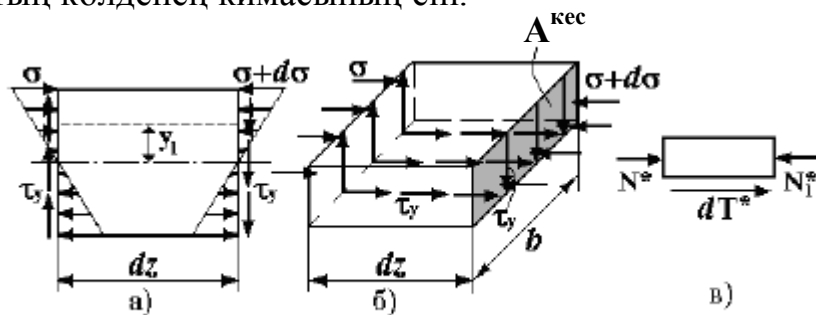
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{u.\max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (5.9)$$

Иілу моментінің ең үлкен мәні моменттер эпюрінен анықталады (модуль шамасы бойынша).

Иілу кезінде арқалықтар қимасында (талшықтар арасында) жанама кернеу де пайда болады. Оның шамасы Д. И. Журавский формуласымен анықталады

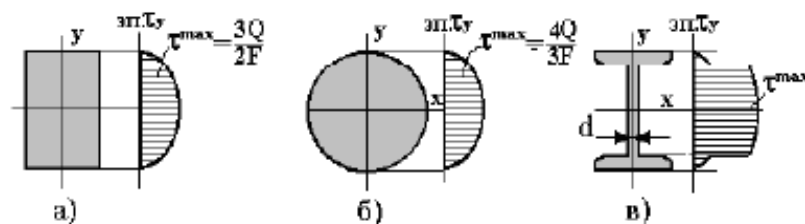
$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{кес}}}{J_x b}. \quad (5.10)$$

Мұндағы τ — қиманың кез келген нүктесіндегі жанама кернеу (5.9-сурет); Q_y — қимадағы көлденең күш; J_x — қиманың бейтарап өс арқылы алынған инерция моменті; $S_x^{\text{кес}}$ — кесілген қима ауданының статикалық моменті; b — арқалықтың көлденең қимасының ені.



5.9-сурет

Төртбұрышты, дөңгелек және қоставр қималары үшін жанама кернеудің эпюрі 5.10-суретте көрсетілген. Қиманың тік кернеулерінің ең жоғарғы мәні болтын нүктелерде жанама кернеу нөлге тең болады, ал тік кернеу нөлге тең болған жерде жанама кернеудің ең жоғарғы мәні әсер етеді.



5.10-сурет

5.6 Иілген конструкцияларды беріктікке есептеу

Иілген конструкцияларды беріктікке есептеу үшін Q және M эпюрлерінен қауіпті қималарды анықтайды. Қауіпті қималар арқалықтың ұзындығы бойынша мынадай жерлерде болуы мүмкін:

а) арқалықтың ең үлкен ию моменті M_{max} (абсолюттік шамасы) әсер етіп тұрған қимасы;

б) арқалықтың ең үлкен көлденең күш Q_{max} әсер етіп тұрған қимасы;

в) арқалықтың Q_{max} және M_{max} қатар әсер етіп тұрған қимасы.

Қауіпті қималарды анықтағаннан кейін, осы қималардың қауіпті нүктелерін іздейді. Қауіпті нүктелер деп басқа нүктелерге қарағанда кернеулерінің шамасы үлкен нүктені айтады. Беріктікке есептегенде, қауіпті қима ретінде M әсер етіп тұрған қиманы алады. Ал қауіпті нүкте ретінде σ_{max} әсер етіп тұрған нүктені алады. Бұл нүктедегі қауіпті кернеу:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x}. \quad (5.11)$$

Тік кернеу бойынша беріктік шарт

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (5.12)$$

Созу мен сығуға қарсыласу қабілеті әр түрлі болса, онда беріктігі ең үлкен созушы және сығылу кернеулер бойынша есептеледі

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma_{cos}], \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma_{cye}]. \quad (5.13)$$

Иілген арқалықтың көлденең қимасының өлшемдері мен жүк көтеру қабілеті беріктік шартымен анықталады:

$$W_x = \frac{M_{max}}{[\sigma]_x}, \quad [M_{uilu}] = W_x \cdot [\sigma]. \quad (5.14)$$

Көлденең қиманың өлшемдері анықталғаннан кейін, оның басқа қауіпті қималарының беріктігін тексереді. Q_{max} әсер етіп тұрған қиманы жанама кернеу арқылы тексереді. Оның қауіпті нүктесінде

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{I_x} \left(\frac{S_x^k}{b} \right)_{max} \leq [\tau] \quad (5.15)$$

Егер қауіпті нүктеде σ және τ қатар әсер етіп тұрса арқалақтаң беріктігін есептеу үшін, оның басты кернеулерін анықтайды. Басты кернеулерді беріктік теориясы арқылы беріктік шарттарының бірі бойынша анықталып, беріктігі тексеріледі.